**TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN**

**KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH**



**BÀI TẬP MÔN**

**PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN**

HOMEWORK #03:

ĐỘ PHỨC TẠP VÀ CÁC KÝ HIỆU TIỆM CẬN

GV hướng dẫn: Huỳnh Thị Thanh Thương

Nhóm thực hiện:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | Lê Ngọc Mỹ Trang | 20520817 |
| 2 | Lê Nhật Minh | 20521601 |
| 3 | Vương Vĩnh Thuận | 20521997 |

MỤC LỤC

[Bài tập 1: 2](#_Toc118742964)

[Bài tập 2: 3](#_Toc118742965)

[Bài tập 3: 6](#_Toc118742966)

[Bài tập 4: Với mỗi nhóm hàm tăng trưởng bên dưới, hãy sắp xếp tăng dần theo bậc tăng trưởng Big-O 9](#_Toc118742967)

[Bài tập 5: Chứng minh 10](#_Toc118742968)

[Bài tập 6: Chứng minh 12](#_Toc118742969)

[Bài tập 7: Các khẳng định bên dưới là đúng hay sai? Vì sao? 15](#_Toc118742970)

[Bài tập 8: 17](#_Toc118742971)

# Bài tập 1:

## Hãy cho biết ý nghĩa của “độ phức tạp” khi đề cập đến thuật toán.

|  |
| --- |
| “Độ phức tạp” không phải là thuật ngữ, đại lượng toán học được nghiên cứu bài bản, thuật ngữ chính xác là “order of growth (bậc tăng trưởng)”. “Độ phức tạp được hiểu theo các ký hiệu tiệm cận, định lượng tương đối độ lớn phép toán của giải thuật so với kích thước của bài toán. |

## Hãy cho biết ý kiến của bản về nhận định dưới đây và giải thích vì sao?

“Khi nghiên cứu về các thuật toán, người ta quan tâm đặc biệt đến tính hiệu quả về thời gian của chúng nhưng thường là quan tâm đến bậc tăng trưởng (order of growth) của hàm thời gian thực hiện của thuật toán, chứ không phải là bản thân thời gian thực hiện T(n)”

|  |
| --- |
| Em đồng ý với nhận định trên, tuy mọi các nghiên cứu về thuật toán đều đặc biệt quan tâm đến hiệu quả của chúng nhưng bản thân thời gian thực hiện T(n) rất khó khăn để xác định và so sánh nếu không có kiến thức chuyên môn cũng như công cụ hỗ trợ. Thay vào đó người ta đưa ra một phương án so sánh khác là ước lượng tương đối độ lớn của T(n) ở cấp độ nào và so sánh cấp độ lớn của các T thay vì chính bản thân chúng. Bậc tăng trưởng ra đời như một công cụ ước lượng cấp độ lớn của T(n) dựa trên các hàm f(n) đã biết mang tính chất dễ thực hiện hơn so với phương án tính toán tuyệt đối với bản thân T(n) |

## Nói về ĐPT tức là đề cập tới các ký hiệu tiệm cận, mà có nhiều ký hiệu khác nhau. Vậy khi nào (trong trường hợp nào) thì nên dùng ký hiệu nào?

|  |
| --- |
| Big-O notation thể hiện mức trên thời gian chạy của thuật toán, vì vậy ta dùng nó khi muốn biết trường hợp xấu nhất của độ phức tạp  Big-Ω notation thể hiện mức chặn dưới thời gian chạy của thuật toán, vì vậy ta dùng nó khi muốn biết trường hợp độ phức tạp tốt nhất  Big-Θ notation thể hiện cả tiệm cận trên và tiệm cận dưới của thời gian chạy của thuật toán, ta dùng nó khi muốn phân tích trường hợp độ phức tạp trung bình |

# Bài tập 2:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| t  f(n) | 1 Second | 1 Minute | 1 Hour | 1 Day | 1 Month =30 Days | 1 Year | 1 Century |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 9 | 11 | 12 | 13 | 15 | 16 | 17 |

Giải thích:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  | * : * : * : * : * : * : * : |
|  | * : * : * : * : * : * : * : |
|  | * : * : * : * : * : * : * : |
|  | * : * : * : * : * : * : * : |
|  | * : * : * : * : * : * : * : |
|  | * : * : * : * : * : * : * : |
|  | * : * : * : * : * : * : * : |
|  | * : * : * : * : * : * : * : |

# Bài tập 3:

## Phép suy ra bên dưới là đúng hay sai và vì sao?

|  |
| --- |
| Từ và , ta suy ra và là 2 hàm cùng thuộc tập hợp gồm các hàm sao cho  Vậy nên dấu “=” ở đây có nghĩa là “” và không đủ cơ sở để có thể áp dụng tính chất bắc cầu để suy ra (vì ) |

## Xét

Chứng minh:

|  |  |
| --- | --- |
|  | Thử chọn    Chọn c = 8, = 640  Theo định nghĩa của Big-O, ta được |
|  | Ta có:      Chọn c = 1, = 1  Theo định nghĩa của Big-O, ta được |
|  | Chọn thì:  Theo định nghĩa của Big-O, ta được |
|  | Giả sử: , ta có:  sao cho:    Điều này mâu thuẫn và vô lý  Suy ra giả sử ban đầu là sai  Vậy |

## Chứng minh

|  |  |
| --- | --- |
|  | Giả sử: **(1)**  sao cho:  Ta có:  Giả sử **(2)**  sao cho:  **(\*)**  TH1:  Xét , ta có    TH2: , ta có: khi    Suy ra **(\*)** mâu thuẫn Giả sử **(2)** sai  Theo giả sử **(1)**:  Nếu  và  thì (vô lý)  Vậy ta có đccm |
|  | Giả sử **(1)**  Xét , ta có:  sao cho:  **(\*)**  TH1:  khi    TH2:  Không tồn tại trong TH này  Suy ra **(\*)** mâu thuẫn, giả sử **(1)** vô lý  Vậy nên (đccm) |
|  | Giả sử  sao cho: **(1)**  Ta có:  Chọn  theo định nghĩa Big-, ta suy ra:**(2)**  Từ **(1)**, **(2)** ta có: **(\*)**  Vì nên **(\*)** mâu thuẫn  Giả sử sai  Vậy |

# Bài tập 4: Với mỗi nhóm hàm tăng trưởng bên dưới, hãy sắp xếp tăng dần theo bậc tăng trưởng Big-O

|  |  |
| --- | --- |
| Group  1: | Vậy: |
| Group  2: | Vậy: |
| Group  3: | Vậy: |
| Group  4: | Vậy: |
| Group  5: | Vậy: |

# Bài tập 5: Chứng minh

## với C là hằng số

|  |
| --- |
| **Chứng minh:**   * Xét 1 hàm bất kỳ, * Ta có: sao cho * Chọn   Theo định nghĩa Big-O, ta có:  Vậy  **Chứng minh:**   * Xét 1 hàm bất kỳ, * Ta có: sao cho * Chọn   Theo định nghĩa Big-O, ta có:  Vậy  Từ |

## với C là hằng số

|  |
| --- |
| **Chứng minh**   * Xét 1 hàm bất kỳ, * Ta có: sao cho * Chọn . Theo định nghĩa Big-O, ta có:   Vậy  **Chứng minh:**   * Xét 1 hàm bất kỳ, * Ta có: sao cho * Chọn . Theo định nghĩa Big-O, ta có:   Vậy  Từ |

## Nếu và thì

|  |
| --- |
| Từ , ta có: sao cho:  Từ , ta có: sao cho:  Ta thấy: ,  Chọn , , theo định nghĩa Big-O ta có:  sao cho:  Kết luận: |

## Nếu và thì

|  |
| --- |
| Từ , ta có: sao cho:  Từ , ta có: sao cho:  Ta thấy:  ,  ,  ,  Chọn , , theo định nghĩa Big-O ta có:  sao cho:  Kết luận: |

# Bài tập 6: Chứng minh

## If , then

|  |
| --- |
| Từ , ta có: sao cho:  Ta thấy: ,  Chọn , , theo định nghĩa Big-O ta có:  sao cho:  Kết luận: |

## where

|  |
| --- |
| **Chứng minh:**   * Xét 1 hàm bất kỳ, * Ta có: sao cho * Chọn thì * Theo định nghĩa Big-, theo cách chọn như trên ta được   Vậy  **Chứng minh:**   * Xét 1 hàm h bất kỳ, * Ta có: sao cho * Chọn thì * Theo định nghĩa Big-, theo cách chọn như trên ta được   Vậy  Từ |

|  |
| --- |
| **Chứng minh**   * Xét 1 hàm bất kỳ, * Ta có: sao cho **(\*)** * Từ **(\*)** ta thấy:   + Chọn . Theo định nghĩa Big-, ta có:  + Chọn . Theo định nghĩa Big-O, ta có:  Từ **(1)** và **(2)** suy ra  Vậy  **Chứng minh:**   * Xét 1 hàm bất kỳ,   Suy ra theo định nghĩa Big- : sao cho  **(\*\*)**   * Từ **(\*\*)** ta suy ra:   Vậy  Từ |

|  |
| --- |
| Ta có:  Ta lại có:  Từ **(1)** và **(2)**, ta suy ra:  Chọn , , , theo định nghĩa Big- ta có:  sao cho:    Kết luận: |

|  |
| --- |
| Ta có:  Ta lại có:  Từ (1) và (2), ta suy ra:  Chọn , , , theo định nghĩa Big- ta có:  sao cho:    Kết luận: |

# Bài tập 7: Các khẳng định bên dưới là đúng hay sai? Vì sao?

## Nếu và , thì

|  |
| --- |
| Từ , ta có:  sao cho:  Từ , ta có:  sao cho:  Mặt khác:  Khi đó:  Chọn , theo định nghĩa Big-, ta có:  sao cho  Vậy , khẳng định trên đúng |

## Nếu và , thì

|  |
| --- |
| Từ , ta có: sao cho: **(1)**  Từ , ta có: sao cho: **(2)**  Từ **(1)** và **(2)** suy ra:  Chọn , theo định nghĩa Big-:  sao cho:  Vậy , khẳng định trên đúng |

## Nếu và , thì

|  |
| --- |
| Xét và , ta có:  Vậy khẳng định trên sai. |

|  |
| --- |
| Ta thấy:  Chọn  Theo định nghĩa Big- Ω,ta được  Vậy khẳng định trên đúng |

|  |
| --- |
| * Xét 1 hàm bất kỳ,     Chọn  Suy ra theo định nghĩa Big- : sao cho  **(\*\*)**   * Từ **(\*\*)** ta suy ra: , khẳng định trên đúng |

|  |
| --- |
| Giả sử , ta có: sao cho:        (không đúng )  Vậy khẳng định trên sai |

|  |
| --- |
| Giả sử , ta có:  sao cho:  **(\*)**  Từ  Nếu chọn , theo định nghĩa Big- Θ thì **(\*)** đúng  Kết luận:  Vậy khẳng định trên đúng |

# Bài tập 8:

|  |
| --- |
| Xét 1 hàm bất kỳ,  Ta có:  Chọn  Suy ra theo định nghĩa Big- : sao cho  **(\*)**  Từ **(\*)** ta suy ra: |

|  |
| --- |
| **Chứng minh**  Từ , ta có: sao cho: **(1)**  Xét ta có:  sao cho: **(2)**  Từ **(1)**, **(2)** ta suy ra:  Chọn , theo định nghĩa Big-O ta có:  **(\*)**  **Chứng minh**  Xét ta có:  sao cho: **(3)**  Giả sử , ta có: sao cho: **(4)**  Từ **(3)**, **(4)** ta suy ra:  Chọn , theo định nghĩa Big-O ta có:    **(\*\*)**  Kết hợp **(\*)** và **(\*\*)**, ta được: khi  Vậy dấu “=” xảy ra khi |

## và

|  |
| --- |
| **Chứng minh và**  Từ tính chất được chứng minh ở câu b, ta có:  Từ **(1)**  Từ **(2)**  Từ **(1)** và **(2)** kết luận:  Nếu và  **(\*)**  **Chứng minh và**  Giả sử: và đơn điệu tăng với với  Ta thấy:    Vậy suy ra nếu và **(\*\*)**  Từ **(\*)** và **(\*\*)** ta được: và |

## và

|  |
| --- |
| **Chứng minh và**  Theo giả thuyết ta có:  Kết hợp giả thuyết ta có (dấu “=” không xảy ra vì giả thuyết (1))  Vậy nếu và **(\*)**  **Chứng minh và**  Giả sử: và đơn điệu tăng với với  Ta thấy:    Vì **(2)**  Mà: và  Suy ra dấu “=” không xảy ra khi và chỉ khi **(3)**  Từ **(2)** và **(3)** ta có:  Nếu **(\*\*)**  Từ **(\*)** và **(\*\*)** ta được: và |

|  |
| --- |
| Từ        Chọn: , , theo định nghĩa Big-O ta được |